Fachhochschule Frankfurt am Main -
University of Applied Sciences
Fachbereich 2: Informatik und Ingenieurwissenschaften -
Computer Science and Engineering
Physiklabor

Physikalisches Praktikum
allgemeine Anleitung
2. Teil

An dieser Anleitung haben mitgearbeitet:

Ing. (grad) Christian Bennert

Professor Dr. Bernd Dumbacher

Professor Dr. Siegbert Erlenkämper

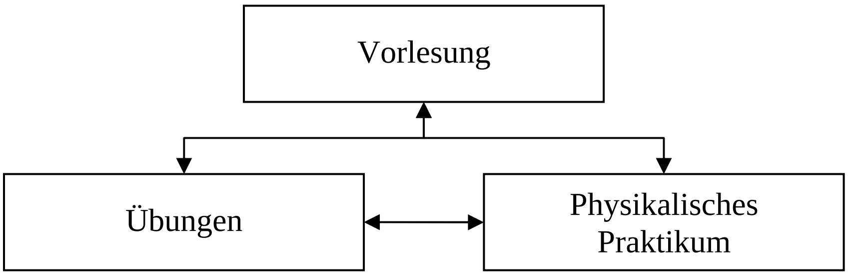
Professor Dr. Rudolf Pitka

Version 03.09

1 Allgemeine Angaben für das Physiklabor

1.1 Das Physikalische Praktikum als Schnittstelle zwischen Theorie und Praxis

Die Lehrveranstaltungen im Teilbereich Physik des Fachbereichs Informatik und Ingenieurwissenschaften zeichnen sich durch eine besondere vernetzte Struktur aus:



In dieser Struktur spielt sowohl der Dozent als auch der Student - mit unterschiedlichen Schwerpunkten - eine aktive Rolle. So werden die physikalischen Grundlagen im Wesentlichen vom Dozenten hergeleitet und anhand von Experimenten demonstriert. Die Anwendung dieser Grundlagen erfolgt über theoretische Beispiele in den Übungen durch die Studenten, wobei "nur" die Qualität des Taschenrechners die Genauigkeit des Ergebnisses bestimmt. Dies ist aber in der Ingenieur-Praxis, wie der Student im Physikalischen Praktikum erfahren kann, nur selten erfüllt!

1.2 Aufgaben und Ziele des Physikalischen Praktikums

Praktische Anwendung der Theorie:
- Überprüfung physikalischer Modellvorstellungen
- Kennenlernen ausgesuchter Messgeräte

Einübung von Methodenkritik:
- Anwendung verschiedener experimenteller Methoden zur Ermittlung des Wertes ein und derselben physikalischen Größe

Anwendung verschiedener Auswertetechniken:
- Rechnerisch, tabellarisch, graphisch; Nutzung von Software

Selbständiges Überprüfen der Ergebnisse:
- Plausibilität, Maßeinheitstest, Vergleich mit Literaturwert

Einübung der ingenieurmäßigen Diskussion:
- Ziel ist der Einsatz einer optimalen Methode, bei der mit minimalem Aufwand das gesuchte Ergebnis gefunden wird.

Zu diesem Zweck ist das Physikalische Praktikum für die technischen Studiengänge eine Pflichtveranstaltung des 1. und 2. Semesters, in dem auch die Gruppenarbeit von Studenten sowie der persönliche Kontakt von Dozent zu Student gefördert werden soll.

1.3 Art und Umfang der zu erbringenden Leistung

Von jeder Praktikumgruppe, die aus maximal 2 Studenten besteht, werden im ersten und zweiten Teil des Praktikums je 3 Versuche durchgeführt. Für jeden durchgeführten Versuch wird ein Bericht abgegeben. Die Mitglieder der Gruppe sprechen untereinander die Aufgabenverteilung ab. Wurden sechs Berichte von dem/der Betreuer/in akzeptiert, gilt das Praktikum als erfolgreich abgeschlossen. Damit haben die Studierenden die Vorleistung für die Prüfungsklausur erbracht und können daran teilnehmen. Die Nachweise über die durchgeführten Versuche (Deckblätter) sind von jedem/r Studierenden bis zur Klausurzulassung aufzubewahren.

1.4 Methodische Schwerpunkte des Praktikums

1.4.1 Physikalische Gebiete der Versuche im 2. Labor

- Mechanik
- Schwingungen
- Wellen

Graphische Darstellung von Messergebnissen

- Lineare Darstellung
- Einfach-logarithmische Darstellung
- Darstellung in Polarkoordinaten
- Darstellung mit Hilfe eines Computers

Behandlung verschiedener Messabweichungen

Grobe Abweichungen

- Plausibilitätsbetrachtung
- Dimensionsbetrachtung
- Vergleich mit Ergebnissen anderer Meßmethoden.
- Vergleich mit Literaturwerten.
- Korrektur von systematischen Fehlern.

Zufällige Messabweichungen

- Abschätzung der Messunsicherheit
- mittlere Abweichung des Mittelwertes einer unabhängigen Größe
  (Standardabweichung des Mittelwertes)
- mittlere Abweichung des Mittelwertes einer abhängigen Größe
  (Gaußsches Fortpflanzungsgesetz für Messunsicherheiten)
- Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate (lineare Regression)
  graphische Abschätzung der Messunsicherheit aus einer Messkurve (Streuband der Messkurve)

1.5 Anleitung zur Versuchsdurchführung und zur Ausarbeitung

1.5.1 Allgemeines

Eine Praktikumsgruppe besteht aus maximal 2 Studierenden.
Es sollte für alle Studierenden selbstverständlich sein, zum Termin **pünktlich** zu erscheinen. Bei der Versuchsdurchführung besteht für die Studierenden **Anwesenheitspflicht**. Eine Verspätung eines Teilnehmers/einer Teilnehmerin von mehr als 20 Minuten kann eine Verschiebung der Versuchsdurchführung für den Teilnehmer/die Teilnehmerin auf einen späteren Zeitpunkt, möglicherweise auch in das nächste Semester, zur Folge haben. Im **Krankheitsfal**l ist ein ärztliches Attest vorzulegen.
Im Labor ist es **untersagt,**

- zu **essen** oder zu **trinken**,
- das **Mobiltelefon** zu benutzen,
- Außerhalb der Praktikumzeiten besteht **kein Anspruch auf Zugang** zu den Laboren.

1.5.2 Vorbereitung

Die durchzuführenden Versuche erfordern eine Vorbereitung. Vor den Versuchsterminen werden Unterlagen bereitgestellt, die die Studierenden **vor dem Termin** durchzulesen haben. Aufgetretene Fragen müssen vor der Versuchsdurchführung gestellt werden, um Unklarheiten aus dem Weg zu räumen. Kommen Studierende unvorbereitet zum Versuchstermin, kann dies zu einer Verschiebung auf einen späteren Termin führen.

1.5.3 Durchführung

Die Versuchsdurchführung wird mit der Erstellung eines handschriftlichen Messprotokolls nachgewiesen, welches am Ende mit dem Betreuer besprochen und von ihm abgezeichnet wird. Es ist **mit Kugelschreiber,** auf keinen Fall mit Bleistift, anzufertigen.

Das **Messprotokoll** wird zur Aufnahme der Messwerte verwendet und muss die nachfolgenden Punkte beinhalten:

- Namen der Versuchsteilnehmer.
- Datum der Versuchsdurchführung.
- Versuchsbezeichnung und Versuchsaufbauten.
- Primäre Messwerte (vor der Verwendung in Gleichungen) mit Formelzeichen und Einheiten in tabellarischer Form entsprechend den Nummern der Aufgabenstellung.
- Mit welchen Messunsicherheiten wurden die Messwerte ermittelt.
- Aufgetretene Schwierigkeiten, Probleme und Besonderheiten.

1.5.4 Laborbericht

Der vollständige Laborbericht ist **vor der nächsten Versuchsdurchführung** dem/der Betreuer/in zu übergeben. Sind an dem Bericht Korrekturen vorzunehmen, haben die Studierenden dies innerhalb von **8 Tagen** zu erledigen. Wird der Bericht nach **zwei Überarbeitungen** von dem/der Betreuer/in immer noch nicht akzeptiert, ist der **Versuch vollständig zu wiederholen**. Ein **neuer Termin** ist mit einem/einer Betreuer/in zu vereinbaren.

Der Bericht muss folgende Dinge enthalten:

- Zwei vollständig ausgefüllte Deckblätter (werden von der FH gestellt). Auf jedem Deckblatt sind die Namen der Experimentatoren, das Datum der Versuchsdurchführung und der Berichtabgabe, der Name des Versuchs und des/der Betreuers/in aufzuführen.
- Die Aufgabenstellung.
- Eine kurze Beschreibung des Versuchsablaufs mit eigenen Worten und gegebenenfalls eine Skizze oder Zeichnung des Versuchsaufbaus.
- Eine Herleitung der benötigten Gleichungen oder ein Hinweis, wo diese zu finden sind, Gleichungen mit den eingesetzten Messwerten, damit nachvollzogen werden kann, welche Messwerte zu welchem Ergebnis führten.
- Eine kurze Erklärung zum Weg der Auswertung.
- Die Darstellung der Messwerte oder Ergebnisse in Diagrammen auf Millimeterpapier. Unbedingt dort verwenden, wo es möglich und sinnvoll ist.
- Die Zusammenstellung der Endergebnisse und, wenn möglich, deren Literaturwerten.
- Diskussion der Ergebnisse und Vergleich mit dem Literaturwert.
- Das Original-Messprotokoll.

Für die Form der Ausarbeitung sind folgende Punkte zu beachten:

- Übersichtliche und lesbare Gestaltung
- Normgerechte Einheiten und Symbolik
- Benennung von Tabellen und Abbildungen.

Diagramme

- Es ist unbedingt Millimeter-, Logarithmen- oder Polarkoordinatenpapier zu benutzen.
- Die Achsen sind am Ende mit Pfeilen, Formelzeichen und der Dimension zu kennzeichnen.
- Die Messpunkte müssen deutlich wiedergegeben werden. Sie müssen bei nichtlinearen Zusammenhängen mit einem Kurvenlineal verbunden werden.
- Jeder der beiden Laborteilnehmer einer Gruppe erhält bei Erfüllung der Anforderungen ein testiertes Deckblatt und soll dieses sorgfältig aufbewahren.

1.6. Betriebsanweisung für Studenten im Physiklabor

1.6.1. Schutzmaßnahmen, Verhaltensregeln

- Fluchtweg im Brandfall oder bei einem Unfall kennen.
- Aufbewahrungsort und Bedienung der Geräte zur Brandbekämpfung (Feuerlöscher) kennen.
- Lage des elektrischen Not-Aus-Schalters kennen.
- Beschädigte Geräte oder Steckdosen dem Betreuer sofort melden.
- Lage des Verbandkastens kennen.
- Standort des nächsten Telefons und dessen Notrufnummer kennen:
  Feuer/ Unfall: **Vorwahl 7** dann **112**
- In den Räumen nicht essen, trinken oder rauchen.

1.6.2. Vorbereitung und Durchführung der Versuche

- Vor dem Versuch ist die Versuchsanleitung sorgfältig durchzulesen und Warnhinweise beachten.
- Arbeitsplatz nach Versuchsdurchführung aufräumen.

1.6.3. Verhalten in Gefahrensituationen

PERSONENSCHUTZ GEHT IMMER VOR SACHSCHUTZ

- Gefährdete Personen warnen.
- Gefahren beseitigen (z. B. Not-Aus-Schalter betätigen).
- Entstehungsbrand mit Eigenmittel löschen (Feuerlöscher); dabei auf eigene Sicherheit achten; versuchen Ruhe zu bewahren.
- Laborleiter benachrichtigen.

1.6.4. Erste Hilfe

- Erste-Hilfe-Ersthelfer benachrichtigen (Angabe auf dem Hinweisschild am Telefon).
- Bei allen Hilfeleistungen auf die eigene Sicherheit achten.
- So schnell wie möglich NOTRUF tätigen.
- Personen aus dem Gefahrenbereich bringen.
- Kleiderbrände löschen.
- Verbandskästen befinden sich in den Räumen 302 und 313.

1.6.5. NOTRUF

Setzen sie einen **NOTRUF** nach folgendem Schema ab:

WO geschah der Unfall:	Ortsangabe
WAS geschah:	Feuer, Vergiftung, Sturz, usw.
WELCHE Verletzungen:	Art und betroffener Körperteil
WIEVIELE Verletzte:	Anzahl
Warten:	Niemals auflegen, bevor die Rettungsleitstelle das Gespräch beendet hat; es könnten wichtige Fragen zu beantworten sein.

2 Themenbereiche der Praktikumsversuche

2.1 Pendelversuche

	Mechanik	**Pendelversuche**
	Versuch 4B	
THEORIE	**Schwerpunkte, Begriffe**	Bestimmung der Fallbeschleunigung g mit einem Reversionspendel Bestimmung der Federsteife
	Physikalische Größen	s = Weg t = Zeit m = Masse l = Länge g = Erdbeschleunigung T = Periodendauer D = Federsteife (Federkonstante)
LABOR	**Geräte, Gerätetechnik**	Digitale Zeitmesser und Lichtschranke
	Handhabung	Elektrische Verschaltung, Aufnahme von Messreihen
AUSWERTUNG	**Aufgabenstellung**	Bestimmung von g aus dem Schnittpunkt zweier Messkurven Ermittlung der Federkonstanten mit einem statischen und einem dynamischen Verfahren
	Graphische Darstellung	T_A und T_B als Funktion von l_{AB} Kraft als Funktion der Federauslenkung Periodendauer als Funktion der Masse
	Messunsicherheit	Berechnung der Unsicherheit des Ergebnisses aus der Abschätzung der Messunsicherheit bei der graphischen Darstellung Gaußsche Fortpflanzung der Messunsicherheiten
	Ergebnisdiskussion	Vergleich mit dem Literaturwert

2.2 Torsionswaage

	Mechanik **Versuch 6**	**Torsionswaage**
T H E O R I E	**Schwerpunkte, Begriffe**	Bestimmung der Winkelrichtgröße D^* (Gerätekonstante), eines Massenträgheitsmoments J und eines Schubmoduls G
	Physikalische Größen	D^* = Winkelrichtgröße J = Massenträgheitsmoment G = Schubmodul φ = Verdrehwinkel s = Strecke m = Masse l = Länge t = Zeit T = Periodendauer
L A B O R	**Geräte,** **Gerätetechnik**	Genaue Messung mittels eines Lichtzeigers, Zeitmessung mittels Handstoppuhren, Drahtdickenbestimmung mittels eines Lasers und einer Bügelmessschraube
	Handhabung	Messreihen aufnehmen, mechanische Justierung
A U S W E R T U N G	**Aufgabenstellung**	1. Statische Bestimmung von D^* 2. Dynamische Bestimmung von D^* 3. Bestimmung des Trägheitsmoments J eines Körpers 4 Berechnung des Schubmoduls G
	Graphische Darstellung	Keine.
	Messunsicherheit	zu 1. Gaußsche Fortpflanzung der Messunsicherheiten zu 2. Gaußsche Fortpflanzung der Messunsicherheiten zu 3. Keine zu 4. Gaußsche Fortpflanzung der Messunsicherheiten
	Ergebnisdiskussion	zu 1.+2. Vergleich der Ergebnisse

2.3 Mikrowellen

	Wellen	**Mikrowellen**
	Versuch 7	
THEORIE	**Schwerpunkte, Begriffe**	Stehende Wellen, Polarisation, Totalreflexion
	Physikalische Größen	λ = Wellenlänge f = Frequenz c = Lichtgeschwindigkeit
LABOR	**Geräte, Gerätetechnik**	Mikrowellensender, Mikrowellenempfänger, Michelson-Interferometer
	Handhabung	Messreihen aufnehmen, elektrische Verdrahtung
AUSWERTUNG	**Aufgabenstellung**	Bestimmung 1. der Polarisationsebene 2. der Richtcharakteristik des Senders 3. der Wellenlänge mit dem Michelson-Interferometer durch Überlagerung von Wellen 4. der Wellenlänge aus einer stehenden Welle 5. der Frequenz des Senders 6. der Untersuchung der Totalreflexion
	Graphische Darstellung	zu 2. Richtcharakteristik in Polardarstellung zu 6. Darstellung des Reflexionsverhaltens
	Messunsicherheit	zu 3.+4. Standardabweichung des Mittelwertes von λ zu 5. Gaußsche Fortpflanzung der Messunsicherheiten
	Ergebnisdiskussion	zu 1. Erklärung der Polarisationsrichtung

2.4 Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Luft

	Wellen	**Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Luft**
	Versuch 11	
T H O R I E	**Schwerpunkte, Begriffe**	Longitudinalwellen stehende Wellen Kundtsches Rohr Reflexion Phasenverschiebung Lissajous-Figuren
	Physikalische Größen	c = Schallgeschwindigkeit λ = Wellenlänge f = Frequenz $\Delta\varphi$ = Phasenverschiebung
L A B O R	**Geräte,** **Gerätetechnik**	Messmikrofone, elektronische Zeitmessung, Niederfrequenz-Generator, Lautsprecher, Oszillograph.
	Handhabung	Manuelle Justierung, elektrische Verschaltung, Messreihen aufnehmen
A U S W E R T U N G	**Aufgabenstellung**	Experimentelle Bestimmung der Schallgeschwindigkeit 1. durch Temperaturmessung 2. durch Laufzeitmessung 3. über stehende Wellen a) geschlossenes Rohr und / oder b) offenes Rohr c) aus der Phasenverschiebung
	Graphische Darstellung	
	Messunsicherheit	zu 1.+2. Gaußsche Fortpflanzung der Messunsicherheiten
	Ergebnisdiskussion	Vergleich der c-Werte mit dem Literaturwert

2.5 Satz von Steiner

	Mechanik **Versuch 15**	**Satz von Steiner**
THEORIE	**Schwerpunkte, Begriffe**	Bestimmung von Massenträgheitsmomenten im Schwingversuch
	Physikalische Größen	J = Massenträgheitsmoment M = Drehmoment φ = Amplitude des Drehwinkels ω = Kreisfrequenz bzw. Winkelgeschwindigkeit f = Frequenz T = Schwingungsdauer, Periode D^* = Drehfederkonstante oder Winkelrichtgröße
LABOR	**Geräte, Gerätetechnik**	Schwingsystem mit einer Spiralfeder Stoppuhr Federwaage
	Handhabung	Messreihen aufnehmen.
AUSWERTUNG	**Aufgabenstellung**	1. Statische Bestimmung der Drehfederkonstante D^* 2. Dynamische Bestimmung der Drehfederkonstante D^* 3. Vergleich der experimentell und der theoretisch bestimmten Massenträgheitsmomente von Scheibe, Kugel, Voll- und Hohlzylinder, Stange
	Graphische Darstellung	zu 4. $T^2 = f(s^2)$
	Messunsicherheit	zu 1.-3. Gaußsche Fortpflanzung der Messunsicherheiten
	Ergebnisdiskussion	Bei welchen Größen ist eine genauere Messung sinnvoll, um ein besseres Ergebnis zu erhalten.

2.6 Untersuchung von mechanischen Schwingungssystemen

	Mechanik	**Mechanische Schwingungssysteme**
	Versuch 18	
THEORIE	**Schwerpunkte, Begriffe**	Untersuchung gedämpfter und erzwungener Schwingungen. Verhalten von Amplituden, Dämpfungen und Phasenwinkeln
	Physikalische Größen	F = Kraft $\hat{x}$ = Federauslenkung, Amplitude D = Federsteife ω = Winkelgeschwindigkeit φ = Phasenwinkel f = Frequenz T = Schwingdauer, Periode δ = Dämpfungskonstante μ = Reibungskoeffizienten Q = Güte des Schwingungssystems
LABOR	**Geräte,** **Gerätetechnik**	Vertikale Schwingsysteme mit einer Schraubenfeder 1. Gedämpfte Schwingung 2. Erzwungene Schwingung
	Handhabung	Mechanische Justierung, Aufnahme von Messreihen
AUSWERTUNG	**Aufgabenstellung**	1. Gedämpfte Schwingungen a) Bestimmung der Federsteife b) Untersuchung der wegabhängigen Reibung c) Untersuchung der geschwindigkeitsabhängigen Luft-Reibung 2. Erzwungene Schwingungen a) Bestimmung der Federsteife b) Aufnahme der Resonanzkurven
	Graphische Darstellung	zu 1c. Überprüfung des exponentiellen Abfalls der Amplitude durch Auftragung des Amplitudenverlaufs auf einfach-log. Papier. zu 2b. $\hat{x}(\omega)$-Kurven und eine $\varphi(\omega)$-Kurve
	Messunsicherheit	zu 1a. Berechnung der Unsicherheit der Ergebnisses
	Ergebnisdiskussion	Bedeutung des Phasenwinkels

3. Abschätzen von Messunsicherheiten

3.1 Allgemeines

Benutzt man ein Messgerät, so ist die Kenntnis der Anzeigegenauigkeit wichtig. Abweichungen vom wahren (meist unbekannten) richtigen Wert können sich aus systematischer Abweichung und Zufallsstreuung zusammensetzen. Um die mögliche Abweichung der Anzeige zu ermitteln muss man sämtliche Einflussgrößen, die auf die Anzeige als Fehler wirken, kennen. Dieser Teil der Anleitung soll Ihnen helfen durch Beispiele ein Gefühl dafür zu bekommen, wie Sie die Einflussgrößen abschätzen können.
Schreiben Sie immer den vollständigen Messwert auf, ohne Stellen wegzulassen. Erst nach der Berechnung der Messunsicherheit $\bar{s}$ können Sie abschätzen, welche Stellen vernachlässigbar sind. Auch eine Null nach einem Komma darf nicht weggelassen werden, wenn sie gemessen wurde. Messen Sie z.B. l = 123,0 cm und lassen die Null weg, bedeutet das, dass die Messunsicherheit bei $\bar{s}_l = \pm 1$ cm, sonst liegt diese bei $\bar{s}_l = \pm 1$ mm.

3.2 Abschätzungen der Messgenauigkeit bei Längenmessungen

Soll z.B. die Länge eines Werkstückes bestimmt werden, so wird das Ergebnis sowohl durch die Unebenheit der Oberfläche als auch durch die Messgenauigkeit des Messinstruments bestimmt. In den folgenden Kapiteln sind Überlegungen zum Abschätzen der Messgenauigkeit von Messinstrumenten beschrieben.

3.2.1 Bandmaß

Misst man mit einem Stahlbandmaß eine Strecke, so kann der Messwert auf einen Millimeter genau abgelesen werden. Misst man größere Längen und das Bandmaß hängt in der Mitte durch, so muss man auch dieses berücksichtigen. Bei einer Länge von 400,0 cm und einem Durchhängen des Bandmaßes von 5,0 cm ergibt sich eine zu große Anzeige von 2 mm.

Tipp zur Vermeidung von Ablesefehlern beim Bandmaß:
Messwerte in cm mit einer Kommastelle ablesen!

3.2.2 Messschieber

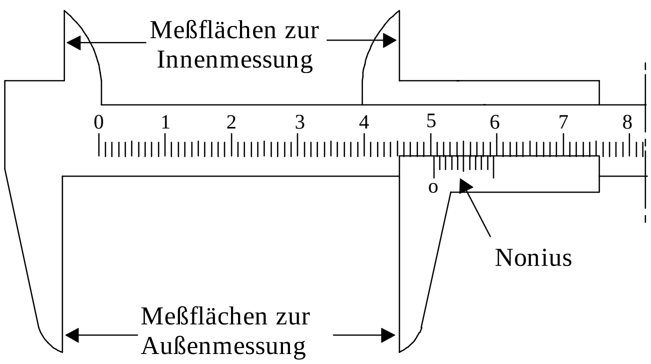


Abb. 3.1

Bei Längenmessung mit dem Messschieber (Abb. 3.1) hat man zwei Möglichkeiten der Längenbestimmung. Mit den Messflächen zur Außenmessung können Außenmaße von Werkstücken und mit den Messflächen zur Innenmessung können Innenmaße von Bohrungen bestimmt werden. Messschieber besitzen einen Nonius, dessen Ablesegenauigkeit meist $^{1}/_{10}$ mm beträgt. Sind die Oberflächen des Messobjekts gleichmäßig und gut messbar, so kann die Messunsicherheit der Längenbestimmung mit $\bar{s}_l = \pm\, 0{,}1\,\text{mm}$ angenommen werden.

Ablesen des Nonius

Die ganzen Millimeter werden auf der Messskala vor dem Null-Nonius-Strich abgelesen (Abb. 3.1 + 3.2). Auf der Abbildung sind dies 50 mm. Die Zehntelmillimeter kann man auf den weiteren Noniusstrichen (Abb. 3.2) ablesen. Stimmt der zweite Nonius-Strich mit einem Strich auf der darbüberliegenden Messskala überein, so hat der abgelesene Wert $^1/_{10}$ mm. In den beiden Abbildungen stimmt der sechste Strich mit dem darbüberliegenden Strich überein, somit beträgt der Messwert 50,5 mm.

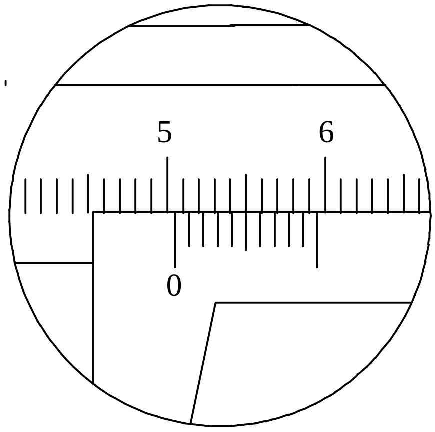


Abb. 3.2

Tipp zur Vermeidung von Ablesefehlern beim Messschieber:

Messwerte in mm mit einer Kommastelle ablesen!

3.2.3 Bügelmessschraube

Funktion

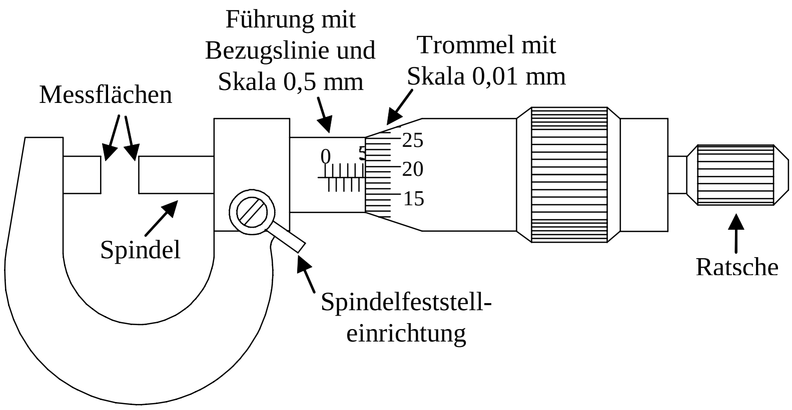


Abb. 3.3

Dreht man die Trommel auf der Führung, so bewegt sich die Spindel, die meist eine Steigung von 0,5 mm besitzt, je nach Drehrichtung vor oder zurück. Hierbei wird der Abstand der Messflächen verändert. Hält man den zu messenden Gegenstand zwischen die Messflächen, so sollte die letzte Annäherung mit der Ratsche erfolgen. Das Gewinde der Spindel hat eine kleine Steigung, durch Drehen an der Trommel würde man leicht die Spindel deformieren und je nach Kraftaufwand einen falschen Messwert erhalten. Die Ratsche dreht die Spindel mit gleichmäßiger Kraft an das Messobjekt heran.

Ablesung

An der Bezugslinie liest man oben zuerst die ganzen bzw. unten die halben Millimeter ab. Hundertstel Millimeter werden am Schnittpunkt zwischen Trommel und Bezugsstrich abgelesen. Der im Beispiel in Abb. 3.3 abzulesende Messwert beträgt 5,18 mm.

Messgenauigkeit

Die Bügelmessschrauben im Labor haben eine Messgenauigkeit von ± 0,01 mm.

3.3 Abschätzung der Messgenauigkeit bei Zeitmessungen

3.3.1 Messung mit Stoppuhren

Bei der Messung mit Stoppuhren sind drei Einflüsse zu berücksichtigen.

1. Die Reaktionszeit des Bedieners.
2. Die Genauigkeit der Stoppuhr.

3. Der Einfluss der Reaktionszeit auf die Messung.

Zu 1: Die Reaktionszeit des Menschen beträgt zwischen dem Erfassen eines Ereignisses mit seinen Sinnesorganen und einer Reaktion darauf ungefähr 0,3 Sekunden. Sie können auch Ihre eigene Reaktionszeit mit Hilfe einer Digitalstoppuhr bestimmen. Decken Sie die Einer-Sekunden ab und starten Sie die Uhr. Wenn die Zehner-Sekunden erscheinen, drücken Sie auf Stop. Auf der Anzeige können Sie jetzt Ihre Reaktionszeit sehen.

Zu 2: Die Genauigkeit der Stoppuhr, mit ± 0,01 s ist sehr viel höher als die unter Punkt 1 und deshalb vernachlässigbar.

Zu 3: Messen Sie einen Vorgang beim Starten und beim Stoppen jeweils 0,3 s zu spät, so würde sich die Reaktionszeit, wenn sie immer gleich groß wäre, aufheben. Da dies aber nicht der Fall ist, kann man eine kleinere Messunsicherheit von $\bar{s}_t = \pm 0{,}15$ s annehmen. Dies ist also eine gute Methode für die Zeitmessung, wenn zu Beginn und Ende der Zeitmessung die gleichen Vorgänge ablaufen.

Schlecht wäre es, wenn Sie beim Start eines Schwingungsvorgangs den Schwinger mit der einen Hand und die Stoppuhr mit der anderen Hand starten. Sie könnten diese beiden Vorgänge zwar mit sehr geringer Zeitdifferenz durchführen, aber während des Stoppvorgangs würde die Reaktionszeit voll eingehen und es würde sich hierbei eine ungünstigere Messunsicherheit ergeben.

3.3.2 Messung mit elektronischen Zeitmessern

Bei der Messung mit den Lichtschranken wird ein Siemens Timer B2041 benutzt. Die Genauigkeit des Gerätes wird für alle Messbereiche mit ± 1 Digit (Wert der letzten Stelle der Anzeige) angegeben. Der Temperaturfehler der Zeitbasis von 1 MHz ist mit $10 \cdot 10^{-6}$ bei 25^{o}C angegeben. Dies bedeutet, dass sich bei einer Temperaturänderung von 5^{o}C eine Zeitabweichung 0,005% ergeben würde. Beim Maximalwert der Anzeige von 9999 erhält man eine Abweichung von ± 0,5 Digit. Dies könnte man vernachlässigen. Wenn man aber auf der sicheren Seite liegen will, rechnet man mit einem Zeitfehler von $\bar{s}_t = \pm 2$ Digit. Die prozentuale Messunsicherheit lässt sich dann je nach Messbereich ausrechnen.

3.4 Abschätzung der Messgenauigkeit bei Massenbestimmungen

Technische Daten der Waagen

	AC88	**PM100**	**PM4600**
Wägebereich	80 g	100 g	4600 g
-im Feinbereich	8 g	- g	600 g
Ablesbarkeit	0,001 g	0,001 g	0,1 g
-im Feinbereich	0,0001 g	- g	0,01 g
Tarierbereich	80 g	110 g	4100 g
Reproduzierbarkeit(Standardabweichung)	± 0,0005 g	± 0,0005 g	± 0,03 g
Reproduzierbarkeit im Feinbereich			0,01 g
Linearität	± 0,001 g	± 0,002 g	± 0,05 g
-im Feinbereich	± 0,001 g		± 0,02 g
Empfindlichkeitsdrift 0..30 °C	$\pm 6\cdot10^{-6}$ /°C	$\pm 4\cdot10^{-6}$ /°C	$\pm 4\cdot10^{-6}$ /°C

Es ergeben sich folgende Einflussgrößen auf die Anzeige bei einer Wägung.

In den Bereichen bis	**8 g**	**100 g**	**600 g**	**/ 4600 g**
Eine **Ablesegenauigkeit** von	0,001 g	0,001 g	0,01 g	0,1 g
Eine **Standardabweichung** von	0,0005 g	0,0005 g	0,03 g	0,01 g
Eine mögliche **Linearität**sabweichung	0,001g	0,002 g	0,02 g	0,05 g

Der mögliche **Temperaturfehler** ergibt sich bei 25 °C

$\bar{s}_{\vartheta} = \pm\, 25\,^{o}\mathrm{C}\cdot 6\cdot 10^{-6}\,\mathrm{g}\,/^{o}\mathrm{C} =$	0,00015 g	0,0001 g	0,0001 g	0,0001 g

Da die Abweichungen der Standardabweichung, der Linearität und der Temperatur sowohl in pos. wie neg. Richtung erfolgen können, ergibt sich die gesamte Unsicherheit der Anzeige aus der Wurzel der Quadrate der Einzelabweichungen plus der Ablesegenauigkeit.

$$\bar{s}_{UA} = \pm\sqrt{\bar{S}_{St}^{\,2} + \bar{S}_{Li}^{\,2} + \bar{S}_{\vartheta}^{\,2}} + \left| s_{Ab} \right|$$

Die **Unsicherheit der Anzeige** ist dann	**±0,002 g**	**±0,003 g**	**±0,05 g**	**±0,2 g**
Dies ist bezogen auf den Endwertwert	±0,03 %	±0,003 %	±0,001 %	±0,01 %

Hinweis!

Überprüfen sie auch, ob die Masse, die sie mit der Waage bestimmt haben, diejenige Größe ist, die in die Berechnung eingeht.

4. Berechnung von Messunsicherheiten

4.1 Art und Entstehung von Messabweichungen

Aus einer einzigen Messung lassen sich keine Aussagen über die Genauigkeit des Messergebnisses und die Genauigkeit der Messung machen. Dazu benötigt man weitere Messungen (Kontroll-messungen). Man erhält dabei im Allgemeinen voneinander abweichende Messergebnisse, d. h. die Einzelergebnisse werden je nach Art des Versuchs und der bei seiner Ausführung angewandten Sorgfalt mehr oder weniger stark voneinander abweichen. Abweichungen vom wahren (meist unbekannten) Messwert sind Messabweichungen. Es treten zwei Arten von Abweichungen auf:

Systematische Messabweichungen

Systematische Abweichungen können durch die Konstruktion des Messgerätes oder eine besondere Verhaltensweise des Beobachters zustande kommen. Sie treten mit einer gewissen Regelmäßigkeit auf, d. h. sie sind konstant oder ändern sich gesetzmäßig. Somit können systematische Abweichungen bei entsprechender Sorgfalt des Experimentierenden erkannt und durch geeignete Messverfahren weitgehend unterdrückt oder durch rechnerische Korrekturen eliminiert werden. Festgestellte systematische Abweichungen dürfen Fehler genannt werden.

Beispiele:

Wägung: Mechanische Unsymmetrie eines Waagebalkens lässt das Gewicht um einen Betrag zu groß oder zu klein erscheinen.

Ablesen einer Skala: Die Messperson schaut schräg unter einem konstanten Winkel beim Ablesen auf das Gerät.

Streuung von Messwerten

Zufällige Abweichungen haben meist eine Vielzahl von Ursachen, die in komplexer, unüberblickbarer Weise Schwankungen des Messwerts bedingen. Zufällige Messabweichungen zeigen eine gewisse Verteilung um einen bestimmten mittleren Wert. Die Zufallsstreuung der Messwerte macht- zusammen mit den unbekannten systematischen Abweichungen- ein Messergebnis unsicher. Diese Abhandlung beschäftigt sich im Folgenden nur mit zufälligen Abweichungen von Messwerten.

Beispiele:

Messung verrauschter Signale: Mehrfache Messung ergibt verschiedene Werte.

Längenmessung: Durch Ungleichmäßigkeiten beim Anlegen des Skalenanfangs und durch Abschätzen von Zwischenwerten der Skala ergeben sich verschiedene Messwerte.

4.2 Zufallsstreuungen von Messwerten

Die Messwerte, die bei einer konkreten Messung erhalten werden, streuen und liegen in der Umgebung des (meist unbekannten) wahren Größe des Messwerts (Größe, deren Wert bestimmt werden soll). Bei wiederholten Messungen der Fallzeit einer Kugel für eine gewisse Strecke kann man nicht damit rechnen, den genauen Wert zu erhalten. Die Messwerte werden in der Umgebung dieses Werts liegen, wobei der Streubereich von der Messanordnung und der Sorgfalt des Experimentators abhängt. Grundsätzlich aber existiert keine Einschränkung für den Bereich, über den die Messwerte streuen können, der Bereich erstreckt sich also von $-\infty$ bis $+\infty$.

Die Messwerte und damit die Streuung sind jedoch nicht gleichmäßig über diesen Bereich verteilt. Wenn eine große Anzahl von Messungen durchgeführt wird, stellt man fest:
a) Man erhält häufiger Messwerte in der Nähe des wahren Werts, als weiter entfernt davon.
b) Messwerte, die um einen bestimmten Betrag zu groß sind, treten ebenso häufig auf, wie Messwerte, die um denselben Betrag zu klein sind (Symmetrie).
Insbesondere bedeutet dies, dass die Häufigkeit für Messwerte, die sehr weit vom wahren Wert entfernt liegen, zwar klein, aber nie null wird. Man kann also keinen (endlichen) Bereich angeben, in den alle Messwerte fallen werden, sondern immer nur Bereiche, in denen ein bestimmter Prozentsatz *p* der Messwerte zu erwarten sind. Anders ausgedrückt heißt das: Bei einer Messung ist die Wahrscheinlichkeit, einen Wert in diesem Bereich zu erhalten, *p* Prozent. Diesen Bereich nennt man Streubereich.

4.3 Rechnerische Erfassungen der Zufallsstreuung von Messwerten

Da der wahre Wert der Messgröße nicht bekannt ist, wird aus den Messwerten ein Wert errechnet, der nach der Theorie dem wahren Wert am nächsten kommt, also eine Näherung für den wahren Wert darstellt. Dies ist der arithmetische Mittelwert $\bar{x}$ der Messwerte x_i (i = 1, 2 ... n), wobei n die Anzahl der Messungen ist.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4.1}$$

Erläuterung: Für eine Reihe von Messwerten x_i (i = 1, n), die durch dasselbe Messverfahren zustande kamen, wird ein Wert a gesucht, der so gewählt werden soll, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen von a minimal ist. Abweichungen der Messwerte von a: $a - x$

Summe der Quadrate: $Q = \sum_{i=1}^{n} (a - x_i)^2$

Forderung: Q = Minimum d. h. $\frac{\partial Q}{\partial a} = 0$

Lösung: $a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$

Wie zuverlässig dieser Mittelwert ist, hängt davon ab, wie weit die Messwerte um den Mittelwert streuen. Das Maß für diese Streuung wird Standardabweichung genannt. Dabei sind zwei Standardabweichungen zu unterscheiden:

a) Standardabweichung der Einzelmessung

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{4.2}$$

Diese Standardabweichung besagt, dass 68,3 % der Einzelmessungen in einem Bereich der Breite 2 s um $\bar{x}$, also zwischen $\bar{x}$ - s und $\bar{x}$ + s zu erwarten sind. Diese Größe charakterisiert die Verteilung der Messwerte. Sie hängt von der Genauigkeit des Messverfahrens und nicht von der Anzahl der Messungen ab.

b) Standardabweichung des Mittelwerts

$$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n\,(n-1)}} = \sqrt{\frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \qquad (4.3)$$

Diese Standardabweichung gibt den Bereich ($\bar{x}$ - $\bar{s}$ bis $\bar{x}$ + $\bar{s}$) an, in dem mit 68,3 % Wahrscheinlichkeit der wahre Wert liegt (Vertrauensbereich). Bei einem bestimmten Messverfahren, also bei fester Standardabweichung s, kann die Zuverlässigkeit des Mittelwerts durch Vergrößerung der Anzahl *n* der Messwerte verbessert werden. Diese Standardabweichung $\bar{s}$ wird deshalb dazu benutzt, einen Fehler oder Vertrauensbereich des Mittelwerts anzugeben.
Diese beiden Gleichungen (4.2) und (4.3) für die Standardabweichung können zwar im Rahmen dieser Abhandlung nicht hergeleitet werden, sollen jedoch anhand eines Experimentes (Fallversuch) erläutert werden. Mit einer Ihnen sicherlich bekannten Messanordnung wird die Zeit für eine Fallstrecke von 1 m mehrfach gemessen. Die Messdurchführung erfüllt die Bedingung für eine statistische Behandlung, nämlich das dieselbe Messung mehrfach durchgeführt wird. Bei einer ausreichenden Anzahl von Versuchen erhält man das in Abb. 4.1 dargestellte Ergebnis. In dieser Abbildung sind die Häufigkeiten der gemessenen Zeiten aufgetragen.
Die relative Häufigkeit $h(t)$ für ein Zeitintervall ist die Anzahl der Messungen mit einem Ergebnis im betrachteten Zeitintervall geteilt durch die Gesamtzahl der Messungen. Bei genügend großer Zahl von Messungen ergibt sich ein symmetrischer Kurvenverlauf gemäß

$$h(t) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\, exp\left(-(\bar{t}-t)^2/(2s^2)\right) \qquad \text{Gaußsche oder Normalverteilung}$$

wobei $\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$, der Mittelwert sämtlicher Messungen nach Gleichung (4.1) und s die Standardabweichung nach Gleichung (4.2) sind. Die Standardabweichung gibt einen Bereich um den Mittelwert herum an, der 68 % aller Messungen enthält.

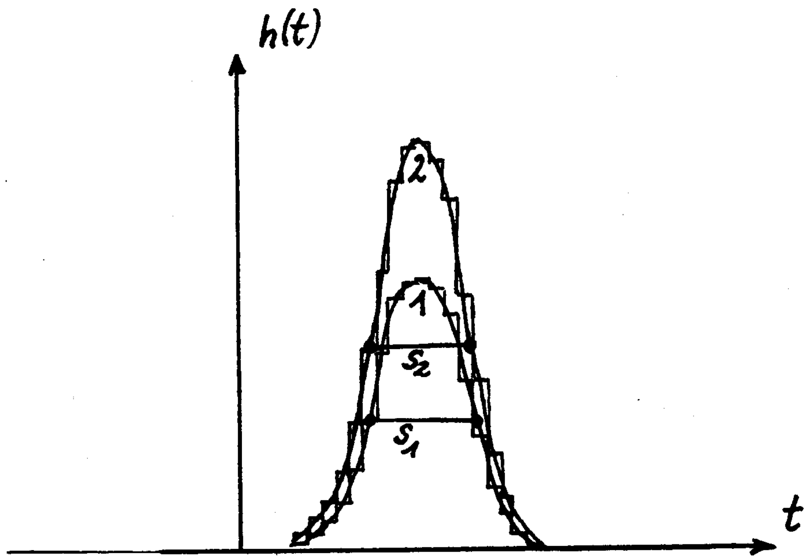


Abb. 4.1

Wird nun die Anzahl n der Messungen vergrößert (Übergang von Kurve 1 zu Kurve 2), so ergibt sich anschaulich, dass die Standardabweichung *s* nicht verringert wird, d.h. *s* ist von der Anzahl der Messungen *n* unabhängig.
Eine größere Anzahl von Messungen hat jedoch einen genaueren Mittelwert zur Folge. Die Standardabweichung des Mittelwertes $\bar{s}$ muss also von *n* abhängen, und zwar in der Form, dass mit wachsendem *n* die Standardabweichung kleiner wird. Bei genauer Berechnung liefert die Theorie den Zusammenhang $\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}}$

Beachten Sie: Taschenrechner liefern in der Regel die Standardabweichung s der Einzelmessung.

Absolute Standardabweichung $\bar{s}$: $\bar{x} \pm \bar{s}$ (4.4)

Beispiel:

$$\bar{x} = g = 9{,}72 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\bar{s}_g = 0{,}21 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$g = (9{,}72 \pm 0{,}21) \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Relative Standardabweichung $\frac{\bar{s}}{\bar{x}}$, häufig in % angegeben:

$$\bar{x} \pm \frac{\bar{s}}{\bar{x}} \cdot 100\,\% \qquad (4.5)$$

$$\frac{\bar{x}}{\bar{s}} = \frac{\bar{s}_g}{\bar{g}} = \frac{0{,}21}{9{,}72} = 0{,}022 = 2{,}2\,\%$$

$$g = 9{,}72 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} (\pm 2{,}2\%)$$

4.4 Gaußsches Fortpflanzungsgesetz für Messunsicherheiten

Selten ist ein Experiment so einfach aufgebaut, dass die mehrfache Messung einer Größe schon das Ergebnis des Experiments darstellt. Meist ist es so, dass das Ergebnis des Experiments aus einer Gleichung errechnet wird, die mehrere direkt messbare Größen enthält.

Beispiele:

a) Bestimmung der Erdbeschleunigung *g* mit einem Reversionspendel $g = (2\pi)^2 l / T^2$

   Die Abweichungen bei der Messung von *l* und *T* ergeben die Unsicherheit für die Größe *g*.

b) Bestimmung der Winkelrichtgröße eines gespannten Drahts nach $D^* = M / \varphi$.

   Die möglichen Abweichungen der Einzelgrößen Drehmoment *M* und Drehwinkel φ setzen sich zur Unsicherheit für die Winkelrichtgröße *D** zusammen.

c) Ganz allgemein: gesuchte Größe *z*, direkt gemessene Größen (bzw. Größen, deren mögliche Abweichungen bekannt sind)

   $u_1, u_2, ..., u_k$

   also $z = f(u_1, u_2, ..., u_k)$

Für die in den Gleichungen enthaltenen Größen (l, T), (M, φ) und (u_1, u_2, ..., u_k) sind also Mittelwerte $\overline{u}_j$ und zugehörige mittlere Fehler $\overline{s}_j$ bekannt. Die Frage ist nun, wie man aus den Messunsicherheiten dieser Größen die Unsicherheit der gesuchten Größen g, D^* und z erhält. Die Gleichung, die dies auszurechnen gestattet, ist das sogenannte Gaußsche Fortpflanzungsgesetz für Messunsicherheiten, das aussagt, wie sich die Messunsicherheiten $\overline{s}_1$, $\overline{s}_2$, ..., $\overline{s}_k$ zur Unsicherheit $\overline{s}_z$ der gesuchten Größe "fortpflanzen".

$$\overline{s}_z=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\,\overline{s}_{u1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\,\overline{s}_{u2}\right)^2+...+\left(\frac{\partial f}{\partial u_k}\,\overline{s}_{uk}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial u_j}\,\overline{s}_{u_j}\right)^2} \qquad (4.6)$$

4.5 Gaußsches Fortpflanzungsgesetz bei wichtigen Funktionen

Für einige häufig auftretende Funktionen sind hier die Schlussfolgerungen nach dem Gaußschen Fortpflanzungsgesetz zusammengestellt. Hierbei ergeben sich zum Teil Vereinfachungen, die Rechenarbeit einsparen helfen.

Summe oder Differenz

Die gesuchte Größe ergibt sich als Summe oder Differenz der direkt gemessenen Größen.

$$z = f\,(u_1, u_2, ...u_k) = u_1 \pm u_2 \pm ....\pm u_k \qquad (4.7)$$

Die Anwendung des Gaußschen Fortpflanzungsgesetzes (Gleichung 4.6) führt zu dem Ergebnis:

$$\overline{s}_z = \sqrt{\overline{s}_1^{\,2} + \overline{s}_2^{\,2} .... + \overline{s}_k^{\,2}} \qquad (4.8)$$

Produkt oder Quotient

Die gesuchte Größe ergibt sich als Produkt oder Quotient der direkt gemessenen Größen. Dabei kann die Funktion $z = f\,(u_1, u_2..., u_k)$, in beliebiger Weise als Produkt oder Quotient aus den Faktoren u_1... ;u_k zusammengesetzt sein, z.B. $z = u_1 \cdot u_2 .... \cdot u_k$

oder $$z = \frac{u_1}{u_2, u_3 \ldots u_k} \quad \text{usw.} \qquad (4.9)$$

Hierbei lässt sich die relative Abweichung besonders einfach berechnen:

$$\frac{\overline{s}_z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\overline{s}_1}{u_1}\right)^2+\left(\frac{\overline{s}_2}{u_2}\right)^2+ .... +\left(\frac{\overline{s}_k}{u_k}\right)^2} \qquad (4.10)$$

Potenzfunktion

$$z = u_1\, u_2^{\,m} \qquad (4.11)$$

$$\frac{\overline{s}_z}{z} =\sqrt{\left(\frac{\overline{s}_1}{u_1}\right)^2+\left(m\frac{\overline{s}_2}{u_2}\right)^2} \qquad (4.12)$$

Für zwei spezielle physikalische Probleme sind im folgenden die Auswirkungen auf die Genauigkeit der berechneten Größe angegeben:

Beispiele:

a) Bestimmung von g mit einem Reversionspendel :

$$z = f(u_1, u_2) \qquad z \Leftrightarrow g \qquad \bar{s}_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l}\,\bar{s}_l\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\,\bar{s}_T\right)^2}$$

$$u_1 \Leftrightarrow l$$

$$g = (2\pi)^2 \frac{l}{T^2} \qquad u_2 \Leftrightarrow T \qquad \bar{s}_g = \sqrt{\left(\frac{1}{T^2}\,\bar{s}_s\right)^2 + \left(\frac{2\,l}{T^3}\,\bar{s}_T\right)^2}\,(2\pi)^2$$

$$\frac{\bar{s}_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\bar{s}_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{s}_T}{T}\right)^2}$$

siehe auch Gleichung (4.12)

Die Ungenauigkeit der Periodendauer T trägt wegen des Faktors 2 stärker zum Gesamtfehler bei.

b) Bestimmung des Direktionsmomentes eines Torsionsdrahtes $D^* = \frac{M}{\varphi} = \frac{m\,g\,l}{\varphi}$

$$\bar{s}_{D^*} = \sqrt{\left(\frac{\partial D^*}{\partial m}\,\bar{s}_m\right)^2 + \left(\frac{\partial D^*}{\partial g}\,\bar{s}_g\right)^2 + \left(\frac{\partial D^*}{\partial l}\,\bar{s}_l\right)^2 + \left(\frac{\partial D^*}{\partial \varphi}\,\bar{s}_\varphi\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{gl}{\varphi}\,\bar{s}_m\right)^2 + \left(\frac{ml}{\varphi}\,\bar{s}_g\right)^2 + \left(\frac{mg}{\varphi}\,\bar{s}_l\right)^2 + \left(\frac{mgl}{\varphi^2}\,\bar{s}_\varphi\right)^2}$$

bzw.: $$\frac{\bar{s}_{D^*}}{D^*} = \sqrt{\left(\frac{\bar{s}_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\bar{s}_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\bar{s}_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\bar{s}_\varphi}{\varphi}\right)^2}$$

4.6 Anwendung des Gaußschen Fortpflanzungsgesetzes

Eine Messung dient stets der Bestimmung einer physikalischen Größe.

Es kann a) die Erstbestimmung einer bisher unbekannten Größe oder

b) die wiederholte Bestimmung einer bekannten Größe sein.

In beiden Fällen ist die Angabe nur der gemessenen Größe ohne Aussagekraft.

Im ersten Fall deswegen, weil nach der Theorie nicht erwartet werden kann, dass der wahre Wert getroffen wird, sondern nur ein Wert in der Nähe des wahren Werts. Durch Angabe des Messunsicherheit gibt man einen Bereich um den gemessenen Wert an, in dem mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit (beim mittleren Standardabweichung 68,3 %) der wahre Wert enthalten ist. Im zweiten Fall kommt hinzu, dass ein Vergleich von Messwerten ohne Angabe der Messunsicherheit sinnlos ist. Jede Messung ergibt einen Streubereich für die Messgröße, der durch die Berechnung bestimmt wird. Wenn für zwei Messverfahren bei derselben Größe sich die Streubereiche überlappen, dann kann man sagen, dass beide Messungen übereinstimmende Ergebnisse haben.

Beispiel: Bestimmung von g: 1. Messung $g = (8{,}8 \pm 1{,}1)\ \mathrm{m/s^2}$

2. Messung $g = (9{,}90 \pm 0{,}11)\ \mathrm{m/s^2}$

Die Streubereiche (7,7 bis 9,9) $\mathrm{m/s^2}$ und (9,79 bis 10,01) $\mathrm{m/s^2}$ überlappen sich und enthalten den Literaturwert 9,81 $\mathrm{m/s^2}$.
Weiterhin dient eine Berechnung der Unsicherheit des Ergebnisses vor Durchführung eines Experiments dazu, einen sinnvollen experimentellen Aufwand zu betreiben, d. h. sehr genaue und damit aufwendige Messungen nur für solche Größen durchzuführen, für die hohe Genauigkeit erforderlich ist.
Hierbei können die Standardabweichungen herangezogen werden, um die Genauigkeit des Messverfahrens zu beurteilen (Standardabweichung Einzelmessung Gleichung (4.2) oder den Genauigkeitsgewinn durch Wiederholung der Messung abzuschätzen (Standardabweichung des Mittelwerts Gleichung 4.3).
Die berechneten Streubereiche ergeben sich aus der Betrachtung der zufälligen Streuung, die bei jeder Messung auftreten und grundsätzlich nicht ausgeschlossen werden können.
Die Berechnung der Fortpflanzung der Messunsicherheit dient:

1. Zur Abschätzung der Zuverlässigkeit eines Messergebnisses.
2. Zum Vergleich eines Messergebnisses mit Literaturwerten oder zum Vergleich zweier unabhängiger Messungen derselben Größe.
3. Zur Bemessung eines sinnvollen experimentellen Aufwands.

4.7 Berechnung der Unsicherheit einer gesuchten Größe

Im Allgemeinen ist die gesuchte Größe eine Funktion mehrerer direkt messbarer Größen. Die Berechnung der Unsicherheit ist nun im Folgenden beschrieben:

Berechnung der Abweichung der direkt messbaren Größen

Es ist anzustreben, die Messung bei direkt messbaren Größen mehrfach durchzuführen, um zufällige Schwankungen ausgleichen zu können. Dies geschieht durch Mittelwertbildung nach Gleichung (4.1). Der Messunsicherheit dieser Größen wird nach Gleichung (4.3) berechnet.
Ist die Messung für einzelne Messgrößen so aufwendig oder kompliziert, dass eine Wiederholung nicht möglich oder nicht erfolgversprechend ist, so muss die Messunsicherheit dieser Größen abgeschätzt werden. Das führt natürlich zu einem subjektiven Einfluss. Diese Abschätzung ersetzt die Mehrfachmessung zur Bestimmung der mittleren Standardabweichung.

Berechnung der Unsicherheit der gesuchten Größe

Wie die Streuungen der direkt gemessenen Größen zur Abweichung der gesuchten Größe beitragen, wird prinzipiell durch das Gaußsche Fortpflanzungsgesetz Gleichung 4.6 beschrieben.
Die Streuung der gesuchten Größe kann als absolute Standardabweichung oder als relative Standardabweichung in % angegeben werden.
Bei der Angabe der Streuung des Messwertes ist auf die Stellenzahl zu achten. Es ist sinnvoll, die erste unsichere Stelle und zusätzlich eine weitere Stelle anzugeben.

g = (9,670 ± 1,025) m/s² **falsch**

g = (9,7 ± 1,1) m/s² **richtig**

Schema für den Ablauf einer Berechnung am Beispiel der Erdbeschleunigung

Im Folgenden ist ein Schema für den Ablauf der Berechnung der Messgenauigkeit am Beispiel der Erdbeschleunigung angegeben. Die Erdbeschleunigung g soll durch Messung der Fallzeit für die Strecke y = 4,905 m ermittelt werden. Es wurden 15 Messungen durchgeführt:

Tabelle der Messwerte:

t/s	t/s	t/s	t/s	t/s
1,0201	0,9825	1,0079	1,0051	0,9843
0,9970	1,0027	1,0308	1,0112	0,9988
0,9992	1,0102	0,9921	0,9821	1,0033

Gleichung, nach der die gesuchte Größe ermittelt wird, aufschreiben.		$g = \frac{2y}{t^2}$
↓ Ermitteln der Messgröße		y = 4,905 m t = 1,0018 s g = 9,775 m/s²
↓ Ermitteln der Streuung der Messgröße	1. Streuung nach Gl. (4.3) 2. Streuung abschätzen	s_t = 0,0136 s $\bar{s}_t$ = 0,0035 s bzw. 0,35 % $\bar{s}_y$ = 5 mm (abgeschätzt) bzw. 0,1 %
↓ Berechnung der Streuung der gesuchten Größe.	1. Partielle Ableitungen bilden für Gl. (4.6) 2. Einsetzen in Gl. (4.6)	gemäß Gleichung 4.12 gilt: $\frac{\bar{s}_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\bar{s}_y}{y}\right)^2 + \left(2\frac{\bar{s}_t}{t}\right)^2}$
↓ Schlüsse aus den Ergebnissen ziehen (siehe Kapitel 4.6)		$\frac{\bar{s}_g}{g}$ = 0,7 % bzw. $\bar{s}_g$ = 0,07 m/s²

Der Literaturwert g = 9,81 m/s² ist im Vertrauensbereich von 9,70 m/s² bis 9,84 m/s² enthalten. Das Messergebnis stimmt also mit dem Literaturwert überein.

Die Messgenauigkeit von g wird dominiert von der Genauigkeit der Zeitmessung, die einen größeren Einfluss als die Genauigkeit der Wegmessung hat.

4.8 Lineare Regression

Viele physikalische Versuche können durch einen linearen oder linearisierbaren Zusammenhang zwischen den Größen x und y dargestellt werden:

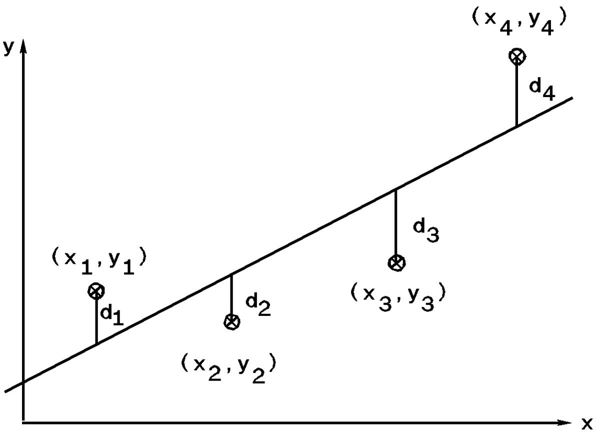
$$y = a + b \cdot x \qquad (4.13)$$

Beispiele:

a) Hookesches Gesetz: $F = - D \cdot x$

b) Federpendel: $T^2 = (2\pi)^2\, m/D$. Es existiert ein quadratischer Zusammenhang zwischen den Messgrößen T und m. Trägt man für die x-Achse $\sqrt{m}$ auf, so ergibt sich die gewünschte linearisierte Form $T = f\left(\sqrt{m}\right)$.

Will man die Parameter a und b der Geradengleichung bestimmen, so misst man nicht nur die Minimalzahl von zwei Wertepaaren, sondern eine größere Anzahl n von Wertepaaren x_i und y_i. Eine systematische Messunsicherheit in x wie in y wirkt sich nur auf die additive Konstante a aus. Das Problem liegt also darin, nach einem Kriterium die überbestimmte Gerade durch die Messpunkte zu legen. Dieses Kriterium ist das Gaußsche Prinzip der kleinsten Quadrate. Es fordert, dass die Summe der Abstandsquadrate (Abstand Messpunkt - zugehöriger Punkt der Geraden)



durch

Abb. 4.2

geeignete Wahl der Geraden $y = a + b \cdot x$ (d. h. durch Wahl von a und b) minimal wird:

Aus dieser Bedingung können die folgenden Gleichungen zur Bestimmung von a, b, $\bar{s}_a$ und $\bar{s}_b$ hergeleitet werden.

Meßwerte: (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... (x_n, y_n)

Anzahl der Messpunkte: n

Gerade $y = a + b \cdot x$ (4.14)

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} \qquad (4.15) \qquad\qquad \bar{s}_a = \sqrt{\frac{Q}{D} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\,(n-2)}} \qquad (4.16)$$

$b = \frac{C}{D}$	(4.17)	$\bar{s}_b = \sqrt{\frac{Q}{D} \cdot \frac{1}{n-2}}$	(4.18)

mit $\quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad (4.19) \qquad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \quad (4.20)$

$$C = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i - \frac{\sum x_i \cdot \sum y_i}{n} \quad (4.21) \qquad D = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n} \quad (4.22)$$

$$E = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum y_i\right)^2}{n} \quad (4.23) \qquad \frac{Q}{D} = \frac{E}{D} - \left(\frac{C}{D}\right)^2 \quad (4.24)$$

Im Physiklabor stehen Rechnerprogramme zur Verfügung, die diese Berechnungen ausführen.

5. Weitere Beispiele für das Rechnen mit Messunsicherheiten

Beim Messen sind Messunsicherheiten nicht zu verhindern (siehe Kapitel 4). Ihre Reduktion ist eine Frage des messtechnischen Aufwandes. Daraus ergeben sich für den Ingenieur u.a. folgende Fragen:
Wann, wo, wie ist es sinnvoll, den messtechnischen Aufwand zu erhöhen?

5.1 Aufgabenstellung

Für einen Körper mit einfacher Geometrie (Kugel) ist -ohne Kenntnis seiner Dichte- zu prüfen, ob seine Massenverteilung homogen ist. Es wird zu diesem Zweck das Massenträgheitsmoment J

$$(J_{exp} \pm \Delta J_{exp})$$

einmal im Schwingversuch ermittelt und einmal unter der Annahme einer homogenen Dichte errechnet:

$$(J_{theor} \pm \Delta J_{theor})$$

Unter der Bezeichnung ΔJ soll hier der Schätzwert der Messunsicherheit bei einer Einzelmessung einer Messgröße x, die mittlere Streuung bei der Vielfachmessung einer Messgröße (x_1, x_2, x_3,...) bzw. die mittels der Gaußschen Methode errechneten Streuung einer, aus den Größen ($x;y;...$), abgeleiteten Größe z ($x;y;...$) verstanden werden. Zum Abschluss (Fazit!) sind beide Resultate vergleichend zu diskutieren, d.h. es ist zu begründen, ob die Aufgabe erfüllt werden konnte.
Es wird ein schrittweises Vorgehen vorgeschlagen:

(1) Bestimmung der Drehfederkonstante (Winkelrichtgröße)
(2) Experimentelle Bestimmung des Massenträgheitsmomentes
(3) Berechnung des Massenträgheitsmomentes
(4) Diskussion

5.2 Bestimmung der Drehfederkonstanten D^*

Physikalische Grundlagen

Für senkrecht aufeinanderstehende Vektoren lauten die Betragsgleichungen für das Drehmoment

$$M = r \cdot F \quad \text{und} \quad M = D^* \cdot \varphi \qquad (5.1)(5.2)$$

Messwerte

Auslenkwinkel	φ = 180°	$\bar{s}_\varphi = \pm 5°$ bzw.2,8 % oder φ = (3,14 ± 0,09) rad	
Kraft	F = 0,25 N	$\bar{s}_F$ = ± 0,01 N	bzw. 4 %
Radius	r = 300 mm	$\bar{s}_r$ = ± 1 mm	bzw. 0,4 %

!!! Bei Einzelmessungen wird die Messunsicherheit i.a. aus der Ablesegenauigkeit abgeschätzt, z.B. als ± 1 mm bei einem Maßstab mit Millimeter-Einteilung. Dabei ist darauf zu achten, dass die Anzahl der Stellen für Messwert und Messunsicherheit übereinstimmen (falsch: 0,25 ± 0,1).

Auswertung

Daraus folgt für die Funktion von drei Variablen

$$\underline{\underline{D^*(F, r, \varphi)}} = \frac{F \cdot r}{\varphi} = \frac{0{,}25N \cdot 0{,}3\text{m}}{3{,}14\text{rad}} = \underline{\underline{0{,}0239 \frac{\text{N m}}{\text{rad}}}} \qquad (5.3)$$

Gemäß Gleichung (4.10) gilt für den relativen Fehler des Direktionsmomentes:

$$\frac{\bar{s}_{D^*}}{D^*} = \sqrt{\left(\frac{\bar{s}_F}{F}\right)^2 + \left(\frac{\bar{s}_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\bar{s}_\varphi}{\varphi}\right)^2}$$

$$\frac{\bar{s}_{D^*}}{D^*} = \sqrt{0{,}04^2 + 0{,}004^2 + 0{,}028^2} = 4{,}9\ \%$$

!!! Der erste Term unter der Wurzel ist am größten, d.h. eine Verbesserung der Messgenauigkeit der Kraftmessung $\bar{s}_F$ würde den "Gesamtfehler" bis zu einem bestimmten Grad reduzieren. Erst danach kommt dem dritte Term, der Winkelmessung, eine Bedeutung zur Verbesserung der D^*-Messgenauigkeit zu.

Absolute Messunsicherheit:

$\bar{s}_{D^*} = 0{,}049\ D^* = 1{,}17 \cdot 10^{-3}$ Nm/rad

so dass als Endergebnis

$D^* = (\,23{,}9 \pm 1{,}2\,) \cdot 10^{-3}$ Nm/rad

=====================

folgt. Dabei wurde der Wert der Messunsicherheit aufgerundet. Diese Art der Abschätzung wird als konservativ bezeichnet.

5.3. Experimentelle Bestimmung des Massenträgheitsmomentes

Physikalische Grundlagen

Der Zusammenhang zwischen Schwingdauer (Periode) und Massenträgheitsmoment lautet

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D*}} \tag{5.5}$$

Messwerte

Schwingungsdauer für 10 Schwingungen: $10 \cdot T = 16{,}9$ s,
Die Messgenauigkeit der Uhr beträgt 0,01 s. Bei der Zeitmessung von Hand ist zu beachten, daß zu Beginn und Ende die Reaktionszeit der messenden Person eingeht. Die Reaktionszeit beträgt beim Menschen ca. 0,3 s. Da sie nur ein späteres Einsetzen und Beenden der Zeitmessung hervorruft, würde sich dieses bei gleicher Reaktionszeit nicht als Messfehler bemerkbar machen. Da dies aber nicht immer der Fall ist, ist mit einer Messunsicherheit von ± 0,1 s zu rechnen.

$10 \cdot T = 16{,}9$ s, $\overline{S}_{10T} = \pm 0{,}1$ s, Genauigkeit der Zeitmessung von Hand,
daraus folgt für eine Schwingung

$T = 1{,}69$ s $\overline{S}_T = \pm 0{,}01$ s bzw. 0,6 %
Durch die 10-fache Dauer der Zeitmessung wird die Messunsicherheit reduziert.

Auswertung

Wert des Massenträgheitsmomentes J_{exp}

$$J_{\exp} = \frac{T^2 D^*}{4\pi^2} = \frac{(1{,}69\text{s})^2 \cdot 0{,}0239\ \text{Nm}}{4\pi^2} = 1{,}73 \cdot 10^{-3}\ \text{kgm}^2 \tag{5.6}$$

Messunsicherheit nach Gauß (Gleichung 4.13)

$$\frac{\overline{S}J_{\exp}}{J_{\exp}} = \sqrt{\left(2\frac{\overline{S}_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\overline{S}_{D^*}}{D^*}\right)^2} \tag{5.7}$$

$$= \sqrt{(2 \cdot 0{,}6\%)^2 + (4{,}9\%)^2} = 5{,}05\ \%$$

$$\overline{S}_J = 0{,}051 \cdot J_{exp} = 88 \cdot 10^{-6}\ \text{kg m}^2$$

Ergebnis:

$$\underline{\underline{J_{\exp} = (1{,}73 \pm 0{,}09) \cdot 10^{-3}\ \text{kg m}^2}}$$

5.4 Berechnung des Massenträgheitsmomentes

Physikalische Grundlagen

Das Massenträgheitsmoment einer homogenen Kugel mit einer durch den Schwerpunkt gehenden Drehachse errechnet sich zu:

$$J_{theor} = \frac{2 \cdot m \cdot r^2}{5} \tag{5.8}$$

Messwerte

Masse	m = 783,0 g	$\bar{s}_m = \pm$ 0,2 g	bzw. 0,03 %
Radius	r = 69,5 mm	$\bar{s}_r = \pm$ 0,2 mm	bzw. 0,3 %

Auswertung

Theoretischer Wert der Massenträgheitsmomentes

$$J_{theor} = \frac{2 \cdot m \cdot r^2}{5} = \frac{2 \cdot 0{,}783\ kg \cdot (0{,}0695\ m)^2}{5} = 1{,}5128 \cdot 10^{-3}\ kg\ m^2 \tag{5.8}$$

Messunsicherheit nach Gauß (Gleichung 4.13)

$$\frac{\bar{S}_{J_{theor}}}{J_{theor}} = \sqrt{\left(\frac{\bar{S}_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\bar{S}_r}{r}\right)^2} = 0{,}6\ \% \tag{5.9}$$

$$\bar{S}_J = 0{,}006 \cdot J_{theor} = 9 \cdot 10^{-6}\ \text{kg m}^2$$

Der Vergleich der Einzelwerte unter der Wurzel zeigt, dass der zweite Summand deutlich größer ist. Eine genauere Messung des Radius r könnte die Unsicherheit des Ergebnisses reduzieren. Die Maßnahme ist in der Praxis nicht nützlich, da die Kugel leicht unrund ist.

Ergebnis

$$J_{theor} = (1{,}528 \pm 0{,}009) \cdot 10^{-3}\ \text{kg m}^2$$

5.5 Diskussion

Vergleich beider Resultate:

$$J_{exp} = (1{,}73 \pm 0{,}09) \cdot 10^{-3}\ \text{kg m}^2$$

$$J_{theor} = (1{,}513 \pm 0{,}009) \cdot 10^{-3}\ \text{kg m}^2$$

Die Resultate unterscheiden sich, beide Unsicherheitsbereiche überlappen sich nicht. Es ist also möglich, dass die Kugel inhomogen ist.