Fachhochschule Frankfurt am Main -
University of Applied Sciences
Fachbereich 2: Informatik und Ingenieurwissenschaften -
Computer Science and Engineering
Physiklabor

Versuch 15 Satz von Steiner

Lernziel: Bestimmung von Massenträgheitsmomenten im Schwingversuch.

1. Grundlagen

Wird auf der vertikalen Achse eines Schwingsystems ein Körper, z.B. ein Stab mit Gewichten, befestigt (Bild 1), dann bewirkt die Spiralfeder bei einer Verdrehung des Stabes um den Winkel φ ein Rückstellmoment M:

$$M = - D^{*} \cdot \varphi , \qquad D^{*} = \text{Drehfederkonstante oder Winkelrichtgröße,} \tag{1}$$

$M = s \cdot F$, Betragsgleichung für senkrechtstehende Vektoren, s = Hebelarm, F = Kraft.

Dieses Rückstellmoment führt beim Loslassen zu einer Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{d^{2}\varphi}{d t^{2}} = \ddot{\varphi}$$

mit $M = J \cdot \alpha$, (2)

J = Massenträgheitsmoment.

Gleichsetzen von (1) mit (2) führt zur Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{D^{*}}{J} \right) \varphi = 0 \tag{3}$$

der Drehschwingung mit der Lösung

$$\varphi (t) = \hat{\varphi} \cos (\omega \cdot t) . \tag{4}$$

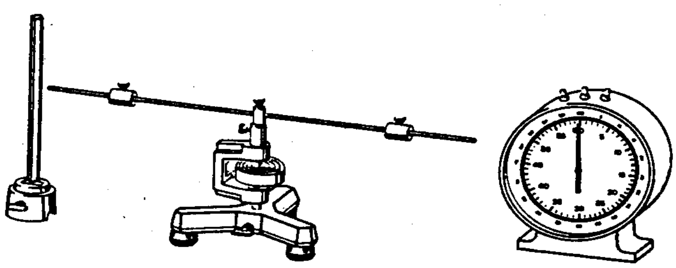


Bild 1

In der harmonischen Funktion bedeuten

$\hat{\varphi}$ = Amplitude des Drehwinkels

ω = Kreisfrequenz bzw. Winkelgeschwindigkeit

f = Frequenz, $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

T = Schwingdauer, Periode.

Die Kreisfrequenz eines Spiralpendels ist gegeben durch

$$\omega^{2} = \frac{D^{*}}{J} \tag{5}$$

Das gesamte Massenträgheitsmoment J setzt sich aus dem des Spiralfedersystems J_F und dem des Körpers $J_{S,K}$ (Index S: Drehachse geht durch den Schwerpunkt S) zusammen :

$$J = J_F + J_{S,K} , \quad \text{im allgemeinen ist } J_F \ll J_{S,K} . \tag{6}$$

Liegt die Drehachse des Körper *K* nicht in seinem Schwerpunkt *S*, sondern in einem Punkt *A*, dann wirkt (Satz von Steiner) ein um den Steiner-Anteil vergrößertes Massenträgheitsmoment:

$$J_{A,K} = J_{S,K} + m \cdot s^2, \qquad (7)$$

wobei mit *m* die Masse des schwingenden Körpers und mit *s* der Abstand zwischen Schwerpunkt und Drehpunkt bezeichnet ist.
Für die Untersuchung am Pendel mit symmetrisch verschiebbaren Zusatzmassen lässt sich das gesamte Trägheitsmoment *J* als Summe eines konstanten Anteils J_0 und eines variablen Anteils $2ms^2$ schreiben:

$$J = J_0 + 2 \cdot m \cdot s^2, \qquad (8)$$

Es gilt daher:

$$\omega^2 = \frac{D^*}{J_0 + 2 \cdot m \cdot s^2} \qquad (9)$$

2. Aufgabenstellung, Durchführungs- und Auswertungshinweise

2.1 Allgemeine Hinweise zur Versuchsdurchführung

- Hilfsmittel: Schwingsystem mit Spiralfeder, Federwaage, Stoppuhr,Winkelmesser, Waage, Meßschieber, Bandmaß.
- Man lenke jeweils die Schwingkörper maximal um 180º aus.
- Zur Erhöhung der Meßgenauigkeit messe man jeweils die Zeit für 10 Schwingungen.
- Man schätze die Unsicherheit für alle Meßgrößen ab.

2.2 Statische Bestimmung der Drehfederkonstante *D**

Versuchsdurchführung: Man bestimme mit einer empfindlichen Federwaage die Kraft *F*, die beim Hebelarm von *s* = 25 cm und bei einer Maximalauslenkung um ± 180º wirkt. Verändern Sie den Winkel in Schritten von 45°. Schätzen Sie die Meßunsicherheit der Meßgrößen *s*, *F und* φ ab.

Auswertung:

A1. Man berechne den Wert der Drehfederkonstanten D^* (1) mit der Methode der linearen Regression unter Benutzung des Programmes Scidavis. Der dabei erstellte Graph der Funktion F(φ) ist zusammen mit den Genauigkeitsangaben auszudrucken.

2.3. Dynamische Bestimmung der Massenträgheitsmomente und der Drehfederkonstanten

2.3.1 Versuchsdurchführung:

Jeder Versuchsteilnehmer bestimme die Schwingdauern $10 \cdot T$ für verschiedene Körper und schreibe alle Meßwerte in Tabellenform auf.

Die Körper sind:

- Scheibe
- Kugel
- Vollzylinder
- Hohlzylinder
- Symmetrisch eingespannter Metallstab ohne Zusatzmassen.
- Metallstab symmetrisch eingespannt mit zwei Zusatzmassen (Bild 1): Die Schwingdauer $10 \cdot T$ ist als Funktion des Abstandes *s* (Abstand Drehachse bis Mitte Zusatzmassen) in eine Wertetabelle einzutragen (Schrittweite ca. Δs = 2 cm).

2.3.2. Auswertung

A2 Man berechne aus (9) die Beziehung $T^2 = f(J, D^*)$.

A3 Man ermittle mit Hilfe der Gleichungen im Anhang (Seite 4) die Massenträgheitsmomente für Scheibe, Kugel, Vollzylinder und Stab bezüglich ihres Schwerpunktes $J_{S,theor}$ und vergleiche diese mit den experimentell gefundenen Werten $J_{s,exp}$ (Benutzen Sie dazu das dynamisch bestimmte D^*). Berechnen Sie die Meßunsicherheit von $J_{s,exp}$ für einen der Körper.

A4 Für den Hohlzylinder bestimme man das Massenträgheitsmoment als Differenz zweier Zylindermomente und überprüfe es mit dem experimentellen Wert.

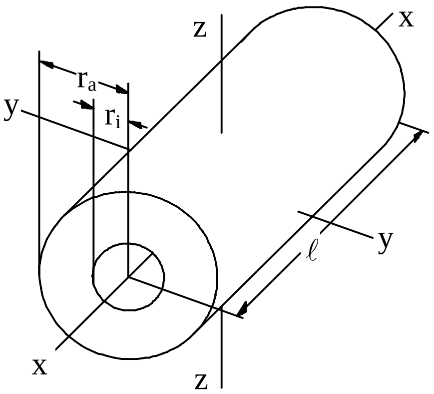
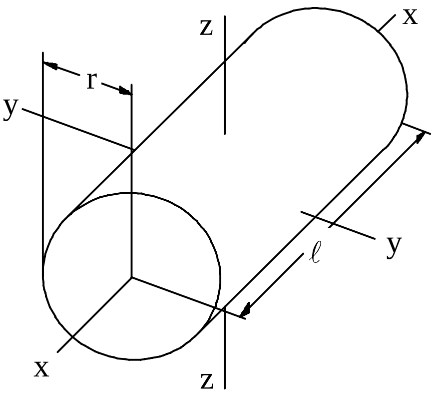
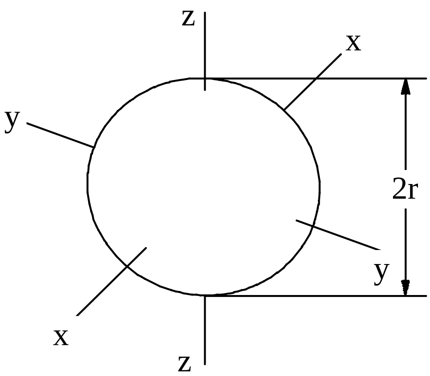
A5 Leiten Sie die Funktionsgleichung $T^2 = f(s^2)$ aus (9) her für den Fall der verschiebbaren Zusatzmassen.

A6 Die Messwerte bei dieser Untersuchung mit den Zusatzmassen sind mit Origin auszuwerten. Origin soll den Graphen $T^2 = f(s^2)$ erstellen und die Steigung der Funktion ermitteln. Berechnen Sie aus der Steigung die Drehfederkonstante D*.

A7 In einer abschließenden Diskussion mache man sich schriftlich Gedanken, welche Größen genauer gemessen werden müssen, um ein genaueres Ergebnis zu erhalten.

3. Anhang

Massenträgheitsmomente einiger Körper

	Hohlzylinder	$J_x = \frac{1}{2} m \left(r_a^2 + r_i^2\right)$ $J_y = J_z = \frac{1}{4} m \left(r_a^2 + r_i^2 + \frac{1}{3} \ell^2\right)$
	dünnwandiger Hohlzylinder	$J_x = m r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{4} m \left(2r^2 + \frac{1}{3} \ell^2\right)$
	Vollzylinder	$J_x = \frac{1}{2} m r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m \ell^2$
	dünne Scheibe (ℓ << r)	$J_x = \frac{1}{2} m r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{4} m r^2$
	dünner Stab (ℓ >> r)	$J_x = \frac{1}{2} m r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{12} m \ell^2$
	Kugel, massiv	$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} m r^2$