Fachhochschule Frankfurt am Main - University of Applied Sciences
Fachbereich 2: Informatik und Ingenieurwissenschaften - Computer Science and Engineering
Physiklabor

Versuch 6 Torsionswaage

Lernziel: Bestimmung von Winkelrichtgröße und Trägheitsmoment

1 Grundlagen

1.1 Physikalische Grundlagen

1.1.1 Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment eines starren Körpers bezüglich einer vorgegebenen Achse ist definiert als

$$J_A = \sum_i^n m_i \cdot r_i^2 \quad (\text{bzw. } J_A = \int r^2 \cdot dm) \qquad (1)$$

Dabei ist m_i ein Massenelement des Körpers, das den senkrechten Abstand r_i von der Drehachse A hat. Der starre Körper ist aus n Massenelementen zusammengesetzt:

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \quad (\text{bzw. } m = \int dm) \qquad (2)$$

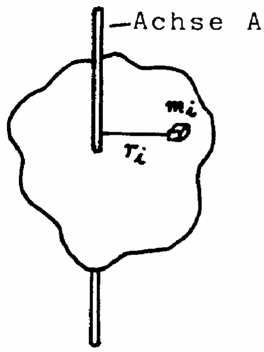


Abb. 1

1.1.2 Winkelrichtgröße (Richtmoment)

Ein Körper sei um eine raumfeste Achse drehbar gelagert und durch ein elastisches Moment an eine Ruhelage gebunden (z. B. können Enden der Torsionsdrähte fest eingespannt sein). Wird der Körper durch ein angreifendes Moment M aus der Ruhelage ausgelenkt, also um den Winkel φ verdreht, so tritt ein gleich großes, entgegengesetzt gerichtetes Moment $M_{Rück}$ auf. Bei elastischer Verformung ist das Moment proportional zum Drehwinkel:

$$M = - M_{Rück} = D^* \cdot \varphi \qquad (3)$$

Die Gerätekonstante D^* heißt Winkelrichtgröße oder Richtmoment.

1.1.3 Periodendauer eines Torsionspendels

Wird ein unter 1.1.2 beschriebener Körper aus der Gleichgewichtslage gebracht und sich selbst überlassen, so führt er eine Drehschwingung aus. Man nennt den Körper dann Torsionspendel. Für die Periodendauer der Drehschwingung gilt:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{J_A}{D^*}} \qquad (4)$$

T ist vom Auslenkungswinkel unabhängig, solange (3) gilt.

1.1.4 Schubmodul

(Nur wichtig für Studenten der Studiengänge Maschinenbau)

Das Verhältnis zwischen Schubspannung τ und der durch sie hervorgerufene Schiebung γ (gleich der Winkeländerung) nennt man Schubmodul *G*.

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \tag{5}$$

G ist eine Materialkonstante. Für die Torsion eines Rundstabes (Abb.2) um seine Längsachse (an einem Ende eingespannt, am anderen greift das tordierende Moment an) gilt:

$$G = \frac{2 \cdot M \cdot l}{\pi \cdot \varphi \cdot r^4} \tag{6}$$

Da $|D^*| = \frac{M}{\varphi}$ ist lässt sich *G* auch wie folgt ausdrücken:

$$G = \frac{2 \cdot D^* \cdot l}{\pi \cdot r^4} \tag{7}$$

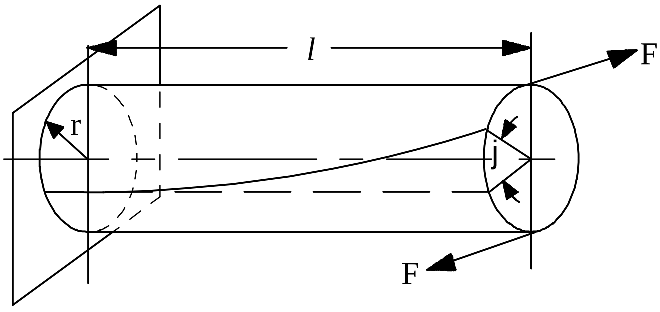


Abb. 2

1.2 Grundlagen der Torsionswaage

1.2.1 Torsionswaage

Die Torsionswaage (Abb. 3) besteht aus zwei annähernd gleich langen Stahldrähten 1 und 2, die über ein starres Mittelstück miteinander verbunden und an den Enden fest eingespannt sind. An der oberen Einspannung ist eine drehbare Scheibe (Winkelscheibe) zur Bestimmung des Drehwinkels angebracht. Am Mittelstück ist der Eichstab befestigt. Der Eichstab hat an den Enden Kerben, die den Abstand s voneinander haben. Wird die Torsionswaage und der Eichstab in die Waagerechte gebracht (siehe Abb. 4), so kann man ein Gewicht in die Kerbe des Eichstabes hängen. Das hierdurch erzeugte Moment *M* dreht das Mittelstück um den Winkel φ aus der waagerechten Ruhelage. Dabei setzen die tordierten Stahldrähte diesem Vorgang ein gleich großes, dem Drehwinkel φ proportionales Moment entgegen.

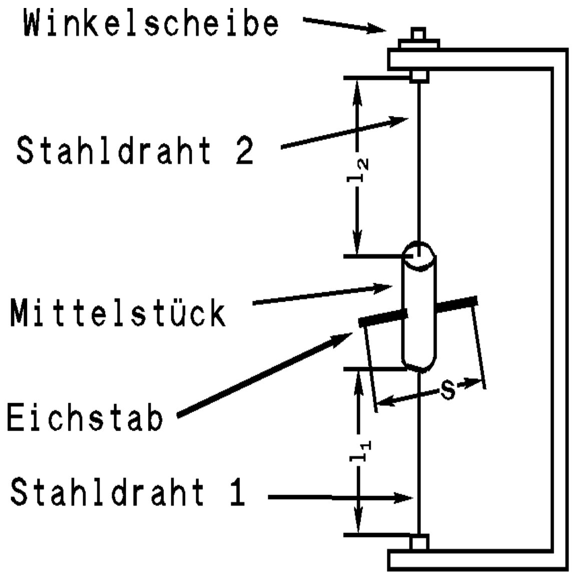


Abb. 3

1.2.2 Torsion der Drähte

In Abb. 4 sind die Drähte der Torsionswaage in der Ausgangslage, Eichstab waagerecht, gezeichnet. Aus dem Vergleich von Abb. 4 mit Abb. 5 und 6 kann man erkennen, wie sich bei der statischen Bestimmung der Winkelrichtgröße D^* die Stahldrähte der Torsionswaage verdrehen.

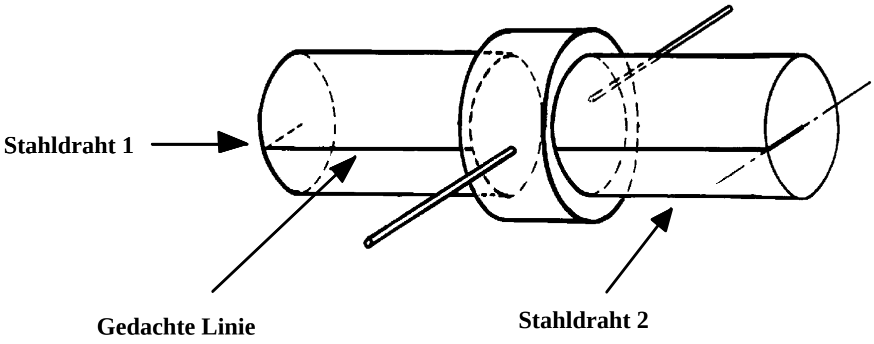


Abb. 4

In Abb. 5 befindet sich links das fest eingespannte, rechts das mit der Winkelscheibe drehbare, Drahtende. Die gedachte Linie soll die Verdrehung um den Winkel φ deutlich machen. Hier ist die Verdrehung der Stahldrähte nach Auflage des Gewichts (kleine Scheibe) mit der Kraft F dargestellt. Am Drehkörper wirkt das Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

wobei $\vec{r}$ der Kraftarm ist.
Aus der Abbildung 5 ist ersichtlich, daß Kraftarm und Kraft keinen rechten Winkel bilden.

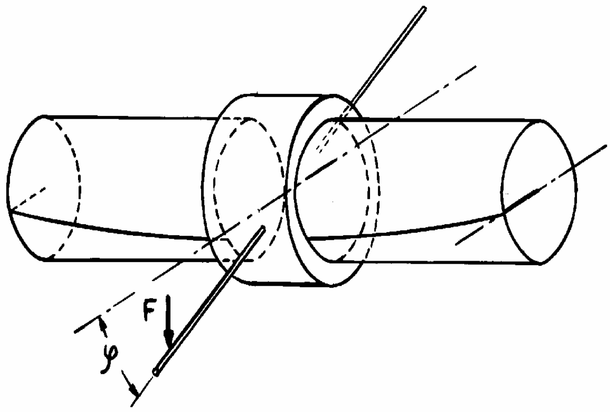


Abb. 5

Wird jedoch die Verdrehung durch Drehen der Winkelscheibe rückgängig gemacht wird (Abb. 6), d.h. die Kompensation mit dem Drehwinkel φ_A erfolgt, dann wirkt die Kraft nun senkrecht auf den Kraftarm r.
In diesem Fall ist der Betrag des Vektorproduktes:

$$\left|\vec{M}\right| = M = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = r \cdot F$$

Die Verdrehung wird durch Drehung der Winkelscheibe um den Winkel φ_A rückgängig gemacht. In der Abb. 6 ist dargestellt, dass nur der Stahldraht 2 an der Verdrehung beteiligt ist. Dies führt zu

$$D_2{}^* = \frac{M}{\varphi_A}$$

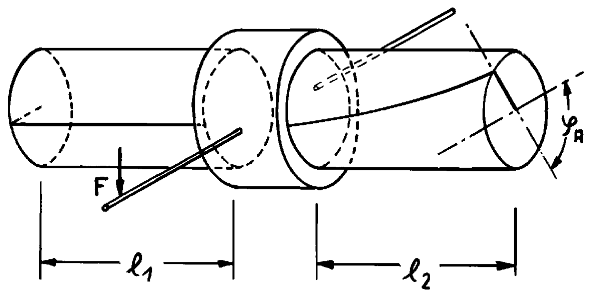


Abb. 6

Da die Länge des Hebelarms schlecht zu bestimmen ist, stellt man für jede Drehrichtung getrennt die Gleichung (3) auf und addiert sie:

$$\begin{aligned} M_r &= D_2^* \cdot \varphi_r = F_G \cdot r_r \\ + M_l &= D_2^* \cdot \varphi_l = F_G \cdot r_l \\ \hline D_2^* \cdot (\varphi_r + \varphi_l) &= F_G \cdot (r_r + r_l) = F_G \cdot s \end{aligned}$$

s = Kerbenabstand
r_r = Hebelarm rechts
r_l = Hebelarm links
F_G = Gewichtskraft

Der Kerbenabstand s ist eine leicht bestimmbare Größe. Dies führt zu $D_2^* = \frac{M}{\varphi_A} = \frac{F_G \cdot s}{\varphi_r + \varphi_l}$. (8)

Bemerkung: Überlegen Sie sich wie Sie die Summe von $\varphi_r + \varphi_l$ in einer Messung bestimmen können.

Für die Berechnung von D^*, also der Winkelrichtgröße beider Drähte, gilt:

$$D^* = D_1^* + D_2^* \tag{9}$$

Da die beiden Stahldrähte $l_1 \neq l_2$ sind, ist

$$D_1^* \neq D_2^* .$$

Der Winkel φ ist proportional zu l und umgekehrt proportional D^*,
daraus folgt:

$$\frac{D_1^*}{D_2^*} = \frac{l_2}{l_1} \tag{10}$$

Aus D_2^* sowie den Längen l_1 und l_2 kann D^* bestimmt werden.

1.2.3 Dynamische Bestimmung der Winkelrichtgröße

Lässt man das Mittelstück mit dem Trägheitsmoment J_D der Torsionswaage schwingen, so gilt nach Gleichung (3)

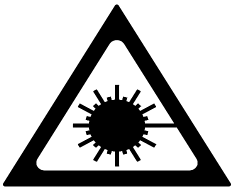
$$T_1 = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{J_D}{D^*}} \tag{11}$$

Die Schwingungsdauer T_1 wird gemessen, die Größen J_D und D^* sind unbekannt. Um die Winkelrichtgröße D^* zu bestimmen, wird eine zweite unabhängige Gleichung gesucht. Man ordnet dem Mittelstück ein zusätzliches Trägheitsmoment zu, dessen Trägheitsmoment berechenbar ist. Dies geschieht mit Hilfe eines dünnen Stabes, dessen Trägheitsmoment J_{St} ist. Die Schwingungsdauer ist dann

$$T_2 = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{J_D + J_{St}}{D^*}} \tag{12}$$

Das Trägheitsmoment eines dünnen Stabes mit der Länge l und der Masse m bezüglich der Drehachse durch den Schwerpunkt, senkrecht zur Stabachse ist gegeben durch:

$$J_{St} = \frac{\left(l^2 + 3r^2\right) \cdot m}{12} \tag{13}$$



Achtung Laserstrahl!

Nicht direkt in den Laserstrahl schauen!

2 Versuchsdurchführung

2.1 Statische Bestimmung der Winkelrichtgröße

Legen Sie die Torsionswaage horizontal. Setzen Sie den Eichstab ein und zentrieren Sie ihn. Klemmen Sie den Hohlspiegel am Mittelstück fest. Stellen Sie den Eichstab horizontal. Befestigen Sie den Laser so am Tisch, daß der Strahl auf den Hohlspiegel trifft. Der Lichtpunkt des Lasers soll an der Wandtafel abgebildet werden, damit Sie dort die Ausgangslage des Eichstabes markieren können. Bestimmen Sie nach der in 1.2.2 beschriebenen Prozedur fünf mal die Summe von $\varphi_r + \varphi_l$ und alle weiteren benötigten Meßwerte.

2.2 Dynamische Bestimmung der Winkelrichtgröße

Stellen Sie die Torsionswaage vertikal. Der Laser wird nicht benötigt. Das Mittelstück wird um ca. 45^{o} ausgelenkt und die Periodendauer T_1 soll zweimal aus je 50 Perioden ermittelt werden. Anschließend wird der größere Metallstab zusätzlich in das Mittelstück eingesetzt und zweimal die Periodendauer von je 20 Perioden ermittelt.

2.3 Bestimmung des Massenträgheitsmoments eines beliebigen Körpers

Die Torsionswaage bleibt vertikal. Durch Einsetzen eines Drehkörpers erhält man eine Apparatur zur Bestimmung unbekannter Massenträgheitsmomente. Man ermittelt zweimal die Periodendauer T_x aus je 10 Perioden.

2.4 Bestimmung der Drahtdurchmesser

Bestimmung des Drahtdurchmessers *d*
a) mit der Bügelmessschraube.
b) mit Hilfe der optischen Interferenz eines HeNe-Lasers (s. Anhang).

3 Auswertung

3.1 Statische Bestimmung der Winkelrichtgröße

A1 Bestimmen Sie aus dem Mittelwert der unter Punkt 2.1 aufgenommenen Messwerte die Winkelrichtgröße D^* und ermitteln Sie die Messunsicherheit des Ergebnisses (Siehe auch in der Anleitung für das Physiklabor die Seiten 35 und 36).

3.2 Dynamische Bestimmung der Winkelrichtgröße

A2 Bestimmen Sie aus dem Mittelwert der unter Punkt 2.2 aufgenommenen Meßwerte die Winkelrichtgröße D^*. Haben sie die Messunsicherheiten, wie folgt, abgeschätzt, $\bar{s}_{n\cdot T} = \pm 0{,}2s$; $\bar{s}_{m} = \pm 0{,}002\ g$, $\bar{s}_{l} = \pm 0{,}1\ mm$ und $\bar{s}_{d} = \pm 0{,}1\ mm$ so ergibt sich eine Messunsicherheit des Ergebnisses von $\bar{s}_{D^*} = 1{,}1 \cdot 10^{-6}\ Nm$.

A3 Diskutieren Sie inwieweit die Ergebnisse der statischen und der dynamischen Untersuchung übereinstimmen.

3.3 Bestimmung des Massenträgheitsmoments eines beliebigen Körpers

A4 Bestimmen Sie aus dem Mittelwert der Meßwerte das Trägheitsmoment des unbekannten Körpers. Benutzen Sie die Winkelrichtgröße aus 3.1 oder 3.2.

3.4 Bestimmung des Drahtdurchmesser mit Hilfe der Laser-Interferometrie

A5 Berechnen Sie den Drahtdurchmesser mit Hilfe der Laser-Interferometrie.

Anhang

4 Bestimmung des Drahtdurchmessers mittels Laser-Interferometrie

4.1 Grundlagen

Beim HeNe-Laser ist die Wellenlänge λ des roten Lichtbündels mit großer Genauigkeit zu $\lambda = (632{,}8 \pm 0{,}2)nm$ bekannt. Beleuchtet man nun mit dieser Lichtquelle den Draht der Torsionswaage, so beobachtet man auf der gegenüberliegenden Wand eine Zeile von Lichtflecken (Abb. 7).

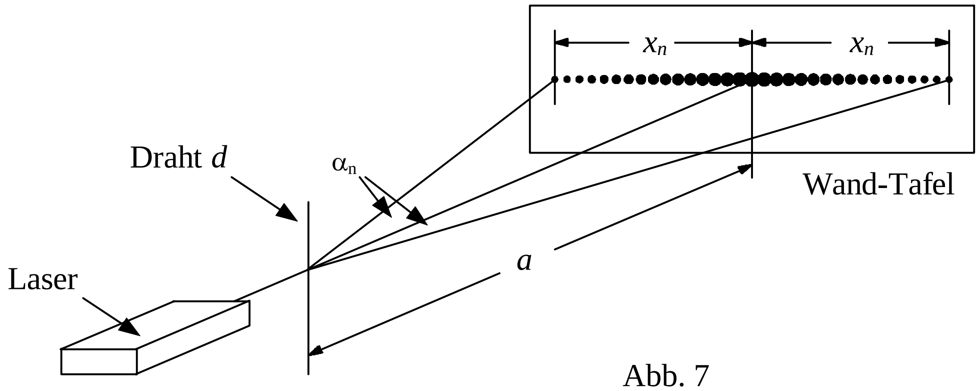


Abb. 7

In der Mitte liegt der zentrale Lichtfleck des Primärstrahls, bei dem der geometrische Schatten des Drahtes lediglich angedeutet ist. Symmetrisch zum Zentralfleck (n = 0) ist eine Folge (n = 1, 2, 3, ...) von weiteren Flecken zu beobachten, die auf Interferenzeffekte zurückzuführen sind. Sie lassen sich wie folgt, erklären:

In der Versuchsanordnung (Abb. 7) ist der Wandabstand a gegen den Drahtdurchmesser d sehr groß. Es gilt damit die später zu benutzende Relation $a \gg d$. Weiter gilt, wenn der Abstand vom Zentralflecken (n = 0) bis zum erste Interferenzflecken (n = 1) mit x_1 bezeichnet wird, dass der eingeschlossene Winkel α_1 der Beziehung

$$\tan \alpha_1 = \frac{x_1}{a} \qquad (14)$$

genügt. Diese spezielle Beziehung ist für höhere Ordnungen (n = 1, 2, 3, ...)

$$\tan \alpha_n = \frac{x_n}{a}\ , \quad n = 1, 2, 3, ... \qquad (15)$$

zu verallgemeinern.

Die Entstehung der Interferenzflecken ist mit der Wellentheorie zu verstehen. Danach bestrahlt die ebene Welle des Laserbündels mit dem Durchmesser *D* den Draht $d < D$ und erzeugt den bereits erwähnten Zentralfleck in x_0. Für andere Wandpositionen ist das Beugungsbild identisch mit dem einer Schlitzblende.

Für Bezugslinien höherer Ordnung gilt für n $\geq$ 1 die Beziehung

$$\sin\alpha_n = \frac{1}{2}(2n+1)\,\frac{\lambda}{d} \qquad (16)$$

Für kleine Winkel α ist $\tan\alpha_n \approx \sin\alpha_n$, so dass sich aus Gleichung 15 und 16 eine einfache Formel

$$\frac{x_n}{a} \cong \frac{\lambda}{d}\,\frac{2n+1}{2} \qquad (17)$$

zur Bestimmung des Drahtdurchmessers *d* ergibt. Zur Auswertung kann der mittlere Abstand zweier Lichtpunkte $\frac{\Delta x}{a} \cong \frac{\lambda}{d}$ verwendet werden. (18)

4.2 Versuchsdurchführung

Richten Sie den Laserstrahl so auf einen Draht, dass dieser in der Strahlmitte liegt und der Strahl senkrecht auf die Wandtafel trifft. Dann erscheinen die Interferenzmuster symmetrisch auf der Wandtafel. Zählen Sie möglichst viele Maxima ($n > 15$) nach beiden Seiten von der Bildmitte ab, markieren Sie diese und halten alle Meßgrößen fest, die sie zur Bestimmung des Drahtdurchmessers *d* benötigen.